カタストロフィーにおける予測不可能性(筑波大学開学20周年記念第2回『非平衡系の統計物理-現状と展望』シンポジウム,研究会報告)

AUTHOR(S):

泰中, 啓一

カタストロフィーにおける予測不可能性

泰 中 啓 一 ＜茨城大　理＞

１。はじめに

複雑に相互作用する大規模系ではカタストロフィーと呼ばれる大異変がしばしば起きる。たとえば、生態系において動植物が絶滅したり、ある生物の固体数が異常に増加したりすること。また選挙において、ある政党が大勝利や大敗北をしたりすること。さらに株価の大きな変動など。このようなカタストロフィーが起きると、たくさんの解析者や研究者がその原因を追求してきた。しかし、彼らの努力にもかかわらず、はっきりした原因を確定できないことが多い。これはカタストロフィーには固有の不確定性が内在しているからであると思われる。この不確定性のために原因を追求できないと考えた方がよいのであろう。最近、私はこのようなカタストロフィーにおける不確定性（原因追求不可能性、または予測不可能性）が起きるメカニズムを議論した［１］。ここではその紹介と、さらにこの不確定性が社会的にどのような意味を持つかについて述べたい。

不確定性という言葉から、カオス系での Butterfly 効果［２］とか、自己組織的臨界状態の理論［３］などを連想する人もいるかも知れない。前者はカオス動力学における強い初期条件感受性のことで、ほんの僅かなチョウチョの羽ばたきすらも、後の大きな気象的異変の原因になり得るというものである。後者は P. Bak らによって主張されている概念である。彼らは砂を積む格子モデルで、系が自己組織的に臨界状態になることを見いだした。この状態では、僅かな量の砂まきでも大きな土砂崩れが起きるという。したがってカタストロフィーが起きた後では、このような些細な原因を追求することは不可能だというのである。これらの説に共通しているのは、初期条件感受性が不確定性の原因であるとする見方である。後者の砂のモデルでも、砂の落ちた位置が少し変われば結果は大きく異なるのである。

しかしこれらの説は、多くの数学者（とくに R.Thom の理論［４］が有名）や、多くの物理学者の伝統的な見方とは異なっている。それは“カタストロフィー　＝相転移”という見方である。一般に、相転移という概念は、初期状態に依らない定常状態を対象としている。私はこの立場から、カタストロフィーにおける不確定性の由来を説明する。そもそも相転移という現象はある程度の不確定性を有する。なぜなら相転移では、わずかな環境変動によって、大きな定常状態の違いが引き起こされるからである。しかし相転移の原因はある程度は予測できることなので（もし平衡系の相転移ならば）、相転移ということだけで十分に不確定性が説明できたとは言えない。たとえば水から水蒸気への相転移においては、その転移の原因は温度の上昇であろうと予想できる。

私はここでもう１つの不確定性の要因を上げる。それは“間接効果”である。間接効果は古くから生態学の分野でよく知られている性質である［５］。生態系では食物連鎖があり、そのためある生物に対する環境変動の影響は、同じ連鎖上の別の生物に対して予期し得ない結果をもたらす。これが間接効果である。生態系では食物連鎖によって釣合がとれているように、多くの非平衡系におい

てはサイクリック・バランス（詳細釣合の破れた定常状態）［６］によって釣合がとれている。間接効果は生態系だけでなく、広くサイクリックな系に共通して観察される性質であろう。

これまで間接効果は主として平均場近似（Lotka-Volterra model）によって説明されてきた。しかし、平均場近似では空間パターンの効果が無視されている。最近、私たちは様々な複雑系における空間パターン形成の研究を通じて、間接効果に対して空間パターンが大きな役割を持つということを示した［７、８］。これまでの平均場近似では説明できないような、まったく予想のできないような新しいタイプの間接効果を見いだした。サイクリックな系では、いつもストレートな因果関係があるとは限らないのである。だからと言って因果関係そのものを否定するわけではない。ある原因に対する結果はいつも決まっている。しかし、同じ原因であっても、わずかな条件の違いで（たとえば相互作用のパラメーターが少し変われば）、結果が１８０゜異なってしまうのである。間接効果はさまざまな条件に強い感受性を持っている。これが不確定性の原因である。

２。モデル

具体的に生態系のモデルを考えよう［１］。２次元の格子空間があって、各格子点には、捕食者（Ｙ）と餌（Ｘ）と空地（Ｏ）の３つの状態のうちの１つをとるものとする。反応モデルは

$$X+Y\xrightarrow{p}2Y, \qquad (1a)$$

$$X+0\xrightarrow{r}2X, \qquad (1b)$$

$$Y\xrightarrow{d}0. \qquad (1c)$$

を考える。（１ａ）は捕食者による捕食、（１ｂ）は餌の増殖、（１ｃ）は捕食者の死亡を表す。ここで定数 ｐ，ｒ，ｄ は捕食率、餌の増殖率、捕食者の死亡率である。私たちはこの反応を格子上で実行する。もしプロセス（１ｃ）の替わりに　Ｙ＋Ｏ→２Ｏ　とすれば、ジャンケン・モデルとなる。このジャンケン・モデルは古くから統数研の伊藤によって研究されている［９］。ジャンケンの格子モデルは私と伊藤の研究がある［１０］。ジャンケンのときには、Ｘ，Ｙ，Ｏは対等の力関係である。それに対してプロセス（１ｃ）は対称性をやぶることになる。

３。シミュレーションの方法

最近ではコンピューターの発達に伴い、数多くの格子モデルが提出されている。

体系（１）は化学反応モデルであり、ここではこれを格子上で反応させることにする。通常、格子上の化学反応モデルといえば、拡散律速反応（Diffusion-Limitted Reaction）［１１］を連想するようである。これは反応粒子がランダム ウォークをしていて衝突したとき反応するというものである。しかし、ここでは位置固定反応法［１０］によって有権者のパターン変化を調べる。位置固定反応は、別名でコンタクト・プロセスとか格子ロトカ・ボルテラ系とも呼ばれる。時間発展は以下のようにして行う。

１）３種類のカラーで各格子点に色を付ける。

２）それぞれの反応プロセスを実行する。

(i) はじめに単独格子点における反応(1c)を実行する。
1つの点をランダムに選び、もしそれがYであるときは、確率dでOに変える。Yでなければ次のステップに進む。
(ii) 次に相互作用(衝突)による反応(1a)、(1b)を行う。
隣接する2つの格子点をランダムに選び、それらを(1a)や(1c)のプロセスによって変化させる。
3)上記ステップ2)を格子点の総数 n×n だけくりかえす。これを Monte Carlo ステップ(MCS)と呼ぶ。時間の単位はこれで測ることにする。
4)さらにステップ3)を1000回くり返す。

4。基礎方程式と平均場近似

我々の生態モデルには基礎方程式が存在する。生物種i の密度 P_i に対しては次の微分方程式が厳密に成立する:

$$\begin{aligned}\dot{P}_X &= -2pP_{XY} + 2rP_{X0},\\ \dot{P}_Y &= 2pP_{XY} - dP_Y,\\ \dot{P}_0 &= -2rP_{X0} + dP_Y,\end{aligned} \qquad (2)$$

ここで ドットは時間微分を表す。またP_{ij}は次のような確率密度である。ある格子点にカラーiを見い出し、その隣の格子点にカラーjを見い出す確率である(i、j=X, Y, O)。これは条件付確率とは異なるので注意を要する。

方程式(2)を解くことはできない。なぜなら P_{ij} という確率密度は全体の空間パターンに関係するためである。もし簡単のために

$$P_{ij} = P_i P_j, \qquad (3)$$

と近似すればこの方程式 (Lotka-Volterra 方程式)は解くことのできる式になる。(3)を(2)に代入し、時間微分をすべてゼロとおけば次の定常密度を得る。

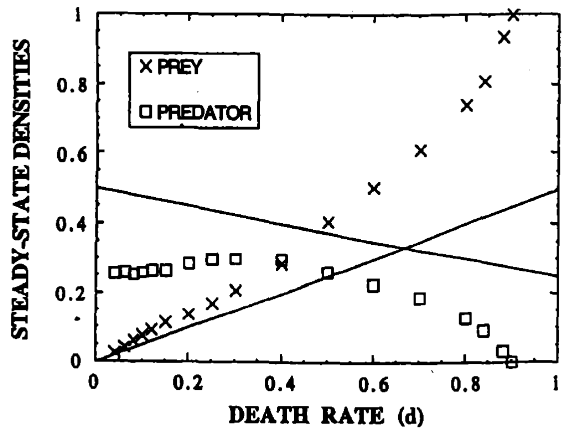
$$P_X = \frac{D}{2},\ \ P_Y = \frac{R(1-P_X)}{1+R},\ \ P_0 = \frac{1-P_X}{1+R}, \qquad (4)$$

ここで $R = r/p,\ \ D = d/p.$ である。式(3)の近似は平均場近似(Mean-Field Approximation: MFA)とも呼ばれる。もし仮に相互作用(衝突)が任意の格子点ペアの間で起これば、そのときシミュレーションの結果は厳密に平均場近似の結果(4)を満足することになる。基礎方程式(2)や平均場近似(4)が存在することはシミュレーションのプログラムのチェックに役立つ。これは位置固定反応法の持つ大きな利点である。

5。シミュレーションの結果

初期パターンを変化させ、また定数 p, r, d をいろいろ変えることによって、空間パターンの時間変化を調べた。

図 1



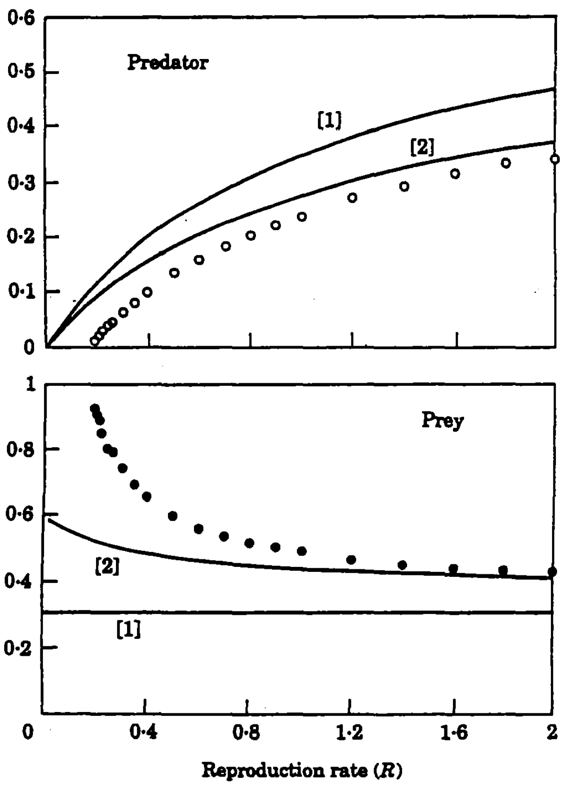


図 2

図１。餌（Ｘ）と捕食者（Ｙ）の定常密度。プロセス（１ｃ）にもかかわらず、Ｙの死亡率ｄの値が増加すると不思議なことにＹが増加する。実線［１］は平均場近似（ＭＦＡ）つまり（４）式であり、また実線［２］はペア近似の結果である。

図２。餌（Ｘ）と捕食者（Ｙ）の定常密度。ただし、横軸はＸの増殖率ｒ。

５－１　直接効果

シミュレーションの結果を述べる。どのようなパラメーターの値に対しても、パターンは最終的に必ずある定常状態に自己組織化されることがわかった。初期のパターンがどんな配置であっても、十分時間が経つと必ず決まった定常状態に到達する。しかし定常とはいってもパターンの模様は刻々と変化している。定常というのは、各カラーの密度などの平均量が一定になるということである。

もし仮に、ある定常状態からパラメーターの値が変化することによって、別の定常状態に移る時を考える。パラメーターの値が変化した直後には、直接効果というものが観測される。たとえば、死亡率ｄが増加すれば、Ｙが減少し，Ｏが増加する。このことは（２）式によって理解できる。方程式（２）で、Ｐᵢⱼという確率密度はパラメーターの値が変化した直後には、まだ変化する直前とほとんど変わらないであろう。このことから容易にＹが減少し，Ｏが増加することがわかる。

５－２　間接効果

次に最終的な定常状態のパターンを考える。パラメーター（死亡率）ｄが増加すれば、はじめは直接効果でＹが減少し，Ｏが増加する。定常状態はどのようになるか。結果が図１に示されている。ここで実線［１］は平均場近似（ＭＦＡ）の結果（４）である。また［２］はペア近似という理論の結果である（ここでは、その詳細を省略する）。もしｄ＝０からｄの値が増加すると不思議なことに捕食者Ｙが増加する。プロセス（１ｃ）にもかかわらず、Ｙが増加する。しかし、ｄの値がもっと増加すると今度は捕食者Ｙが減少する。そしてついには、Ｙは完全に消えてしまう。これは明らかに間接効果である。これまで間接効果は主として平均場近似によって説明されてきた。しかし、これはこれまでの平均場近似では説明できないような、まったく予想のできないようなパラドックス（新しいタイプの間接効果）である。つまり、ある不要な生物（Ｙ）を少しずつ除去し続けても、その生物が逆に増えてしまうことが起きる。

次に定数ｒを変えることによって、空間パターンはどのように変化するか。この時、カタストロフィーと呼ばれる現象が起きる。ｒの値が減少すると不思議なことに餌Ｘが増加する。プロセス（１ａ）にもかかわらず、Ｘが増加する。とくに、ｒの値がある値（ｒｃ）に近ずくと、Ｘは急激に増加し、ｒ＞ｒｃで、Ｘは全空間を占める。このときＹは絶滅する。

６。まとめと議論

６－１　カタストロフィーにおける不確定性

図２でＹの絶滅の原因を考えてみる。Ｘの増殖率ｒの値が減少することによって、Ｙは絶滅した。しかし、絶滅した後ではこのことは絶対にわからない。なぜなら餌Ｘが増加しているからである。これをカタストロフィーの不確定性と呼ぶ。この不確定性に対して２つの要因を上げることができる。つまり相転移と間接効果である。相転移は、非線形性に由来する現象で、些細な原因によって大きな結果が引き起こされるという性質を持っている。一方、間接効果は非平衡性に由来しており、原因と結果の間に直接的な関係がないことを意味する。したがってカタストロフィーという結果が起きたとしても、その結果と関係がなく、しかも極めて些細な原因を追求することは不可能に近い。私の説は、す

べて初期条件にまったく依存しない定常状態での話である。

６－２　持続的開発は可能か

以上のように、私はカタストロフィーの不確定性を、非平衡相転移の特徴としてとらえた。非平衡相転移にはもう１つのよく知られた特徴がある。それは相転移の非対称性である。我々がシミュレーションによって非平衡系の臨界現象を研究している時、いつも出くわす問題である。臨界点を決めようとしてもなかなか決められないのはこのためである。この非対称性というのは、たとえば生態系でいえば次のようなことである：相転移によって絶滅した生物は二度と戻って来ない。このため生態系のシミュレーションをしていて、もしも種が絶滅してしまうと、めんどうなことにまた始めからやり直しをしなければいけない。しかし、現実の生態系ではやり直しはできない。絶滅した生物（ＤＮＡ）はもう帰って来ないのである。

最後に「持続的開発」は可能かという問題を考える。答は「ノー」である。一般的に言って、開発などの生態系の攪乱にたいして、生態系はどのように応答するか。応答は２つのプロセスから成り立つ。１つは短期的で、他の１つは長期的応答である。前者は直接効果、後者は主として間接効果で決まる。生物絶滅もこの直接効果と間接効果によって引き起こされる。直接効果による絶滅はなんとか予測できるが、間接効果によって起きる絶滅は不確定性のために予測できない。したがって、ある開発を行ったとき、ある生物が絶滅するであろうことは確かに予測できる（直接効果による）。ところが、その開発によって、すべての生物が絶滅しないであろうということは予測できない（不確定性）。したがって、「持続的開発」ということは全くの空想であることがわかる。なぜなら開発自体に、生物絶滅の危険性を持っているからである。

参考文献

［１］ K. Tainaka: J. Theor. Biol. に出版予定.

［２］ E. N. Lorentz: J. Atmos. Sci. 20 (1963) 130.
H. G. Schuster: Determistic Chaos (Physik-Verlag, Weinheim, 198).

［３］ P. Bak and K. Chen: Sci. Am. 21 (1991) 26.

［４］ R. Thom: Structural Stability and Morphogesis (Benjamin, New York, 1972).

［５］ 巌佐　庸：数理生物学入門（ＨＢＪ出版局、１９９０）.

［６］ K. Tomita and H. Tomita: Prog. Theor. Phys. 51 (1974) 1731.
K. Tainaka, et.al.: Prog. Theor. Phys. 80 (1988) 199.

［７］ K. Tainaka and S. Fukazawa: J. Phys. Soc. Jpn, 61 (1992) 1891.

［８］ K. Tainaka, et.al.: Publ. Astron. Soc. Jpn. 45 (1993) 57-64 and Plate 1.
K. Tainaka: Phys. Lett. A 176 (1993) 303.

［９］ Y. Itoh: Prog. Theor. Phys. 78 (1987) 507.

［10］ K. Tainaka: Phys. Rev. Lett. 63 (1989) 2688: J. Phys. Soc. Jpn, 57 (1988) 2588.
K. Tainaka and Y. Itoh: Europhys. Lett. 15 (1991) 399.

［11］ S. Kanno and K. Tainaka: J. Phys. Soc. Jpn, 62 (1993) 2275.